PENGHITUNGAN KREDIBILITAS DENGAN PUSTAKA ACTUAR DALAM R

I. MAULIDI[1], W. ERLIANA[2], A. D. GARNADI[2], S. NURDIATI[2], I G. P. PURNABA[2]

Abstrak

Teori Kredibilitas (*Credibility Theory*) merupakan perangkat penting dalam pekerjaan aktuaria. Dengan menggunakan Kredibilitas dapat diduga besarnya pembayaran premi atau banyaknya klaim yang akan terjadi di masa mendatang secara kredibel. Dalam tulisan ini akan diperkenalkan konsep dalam teori kredibilitas dan aplikasinya dengan menggunakan paket Actuar yang ditulis menggunakan software R.

PENDAHULUAN

Kredibilitas adalah sebuah ukuran penilaian seorang aktuaris terhadap dugaan premi di masa mendatang. Data di masa lampau tidak sepenuhnya dapat digunakan untuk menduga di masa mendatang, sehingga revisi dari penduga pun sering dilakukan. Selain itu risiko untuk setiap kelompok individu sangat dimungkinkan berbeda beda. Oleh karena itu kita perlu mengembangkan suatu analisis dari data di masa lampau untuk menduga data di masa mendatang. Sering kali data di masa lampau tidak stabil apabila digunakan untuk memprediksi premi di masa mendatang, sehingga revisi pendugaan sering kali dilakukan. Oleh karena itu diperlukan suatu tool untuk menggunakan data di masa lampau sehingga dapat memprediksi besarnya tingkat premi dan banyaknya klaim di masa mendatang.

Misalkan $X_1,\ X_2, \ldots\ , X_n$ merupakan besarnya kehilangan di n tahun yang lalu atau n pemegang polis yang lalu. Secara umum ini merupakan n unit *exposure* yang diamati.

Asumsi

$$E[X_j] = \xi,$$

$$Var(X_j) = \sigma^2,$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

untuk $j = 1, \ldots, n$ dan

[1]Program Studi Matematika Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh. Email: ikhsanmath47@gmail.com.
[2] Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahauan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

Ada pun untuk menyatakan kredibilitas untuk X kita harus mendefinisikan error relatif terlebih dahulu. Untuk suatu nilai peluang $p, p \in \mathbb{R}, 0 \le p \le 1$ dan untuk tingkat error ε, jika dipenuhi

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\xi}{\xi}\right| \le \varepsilon\right) \ge p,$$

maka kita katakan X adalah *credible* untuk ξ.

BEBERAPA MODEL KREDIBILITAS

Model Buhlmann

Model ini merupakan model kredibilitas yang paling sederhana. Pada masing-masing pemegang polis (bergantung pada Θ), besarnya klaim dari masa lalu $X_1, \ldots, X_n$ memiliki rataan dan ragam yang sama dan *i.i.d* bergantung pada Θ.

Didefinisikan

$$\mu(\theta) = E(X_j|\Theta = \theta),$$

dan

$$v(\theta) = Var(X_j|\Theta = \theta).$$

Dalam hal ini $\mu(\theta)$ kita disebut sebagai *hypothetical mean* dan $v(\theta)$ disebut *process variance*.

Selanjutnya kita dapat menentukan rataan, ragam dan koragam X_j sebagai berikut:

$$E(X_j) = E[E(X_j\Theta) = E[\mu(\Theta)] = \mu,$$

$$\begin{aligned} Var(X_j) &= E[var(X_j\Theta) + var[E(X_j\Theta)] = \mu \\ &= E(v(\Theta)) + var((\Theta)) \\ &= v + a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_iX_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j), i \neq j \\ &= E[E(X_iX_j\Theta)] - \mu^2 \\ &= E(E(X_i\Theta).E(X_j|\Theta)) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= E(((\Theta))^2) - [E(\mu(\Theta))]^2 \\ &= Var(\mu(\Theta)) = a. \end{aligned}$$

Model pedugaan premi kredibilitas Buhlmann dihampiri dengan suatu fungsi linear berikut:

$$\alpha_o + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j = Z\bar{X} + (1-Z)\mu,$$

Dengan $Z = \frac{n}{k+n}$, $k = \frac{v}{a} = \frac{E[var(X_j|\Theta)]}{var[E(X_j)|\Theta]}$. Penurunan formula ini dapat dilihat pada Klugman (2012).

Model Buhlmann Straub

Model kredibilitas Buhlmann-Straub adalah pengembangan dari model kredibilitas Buhlmann dengan beberapa asumsi tambahan. Diberikan $\Theta, X_1, \dots, X_{n+1}$ saling bebas untuk $j = 1,2, \dots, n+1$, misalkan pula m_j menyatakan banyaknya individu pada tahun ke-j maka berlaku:

$$E[X_j|\Theta] = \mu(\Theta),$$

$$Var(X_j|\Theta) = \frac{v(\Theta)}{m_j}.$$

Selanjutnya kita notasikan sebagai berikut:

$$\mu = E[\mu(\Theta)], a = Var(\mu(\Theta))$$

$$v = E[v(\Theta)], k = \frac{v}{a}.$$

Kuantitas-kuantitas di atas dapat digunakan untuk menentukan premi kredibilitas. Premi kredibilitas untuk model Buhlmann-Straub ini adalah

$$(1 - Z)\mu + Z\bar{X},$$

dengan $\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j X_j}{m}$, $Z = \frac{m}{m+k}$, dan $\sum_{j=1}^{n} m_j = m$.

BEBERAPA CONTOH DAN APLIKASI

Contoh 1

Misalkan banyaknya klaim tahunan untuk seorang individu yang diasuransikan memiliki sebaran Poisson. Nilai harapan frekuensi klaim tahunan (parameter Poisson Δ) dari anggota populasi yang diasuransikan menyebar seragam (0,1). Rataan frekuensi klaim tahunan individu adalah konstan sepanjang waktu. Tentukan faktor kedibilitas Buhlman Z jika ada n amatan.
Jawab:

Hypothetical mean dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(\Delta) = E(X|\Delta) = \Delta,$$

hal ini karena $X|\Delta$ menyebar Poisson(Δ). Proses *variance* dapat ditentukan sebagai berikut:

$$V(\Delta) = var(X|\Delta) = \Delta$$

sehingga diperoleh kuantitas:

$$\mu = E(X) = E(E(X|\Delta)) = E(\mu(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$
$$v = E(V(\Delta)) = E(\Delta) = 0.5$$
$$\alpha = var(\mu(\Delta)) = var(\Delta) = \frac{1}{12}$$

sehingga diperoleh faktor kredibilitas Buhlmann

$$Z = \frac{n}{n + \frac{1/2}{1/12}} = \frac{n}{n+6}.$$

Contoh 2

Misalkan N_j menyatakan banyaknya klaim di tahun j, di mana terdapat m_j anggota di tahun j tersebut. Diberikan $\Theta = \theta, N_j|(\Theta = \theta) \sim$Poisson$(m_j\theta)$ dan $\Theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Selanjutnya dari informasi tersebut kita dapat menentukan Buhlmann-Straub *credibility premium* dari rata-rata banyaknya klaim pada tahun $n+1$ untuk setiap anggota.
Jawab:

Misalkan$X_j = \frac{N_j}{m_j}$, maka

$$\mu(\Theta) = E[X_j|\Theta] = \frac{1}{m_j} E[N_j|\Theta] = \frac{1}{m_j} m_j \Theta = \Theta,$$
$$v(\Theta) = Var(X_j|\Theta) = \frac{1}{m_j^2} Var(N_j|\Theta) = \frac{1}{m_j^2} m_j \Theta = \frac{\Theta}{m_j},$$
$$\mu = E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = \alpha\beta,$$
$$v = m_j E[v(\Theta)] = m_j \frac{1}{m_j} E[\Theta] = \alpha\beta,$$
$$a = Var(\mu(\Theta)) = Var(\Theta) = \alpha\beta^2,$$
$$k = \frac{v}{a} = \frac{1}{\beta},$$

sehingga diperoleh *credibility factor* $Z = \frac{m}{m+k} = \frac{m\beta}{m\beta+1}$. Dengan demikian, Buhlmann-Straub *Credibility* untuk model ini adalah

$$\frac{m\beta}{m\beta+1}\bar{X} + \frac{1}{m\beta+1}\alpha\beta.$$

PENGGUNAAN PACKAGES "ACTUAR" UNTUK KREDIBILITAS

Simulasi Data Hachemeister

Berikut ini kami sajikan sebuah contoh simulasi menentukan besarnya premi dengan menggunakan model kredibilitas. Simulasi dilakukan dengan menggunakan software R dan packages "actuar" yang diperoleh dari CRAN. Data yang digunakan dalam simulasi adalah data dari Hachemesiter (1975) yang memuat besarnya klaim dan banyaknya klaim dari pemegang polis asuransi. Data ini terdapat dalam packages berupa matriks dengan banyaknya baris 5 dan banyaknya kolom adalah 25. Kolom 1 merepresentasikan kelompok dari pemegang polis, kolom 2-13 merepresentasikan rataan besarnya klaim setiap periode dan kolom 14-25 merepresentasikan banyaknya klaim setiap periode.

```
> data(hachemeister)
> hachemeister
     state ratio.1 ratio.2 ratio.3 ratio.4 ratio.5 ratio.6 ratio.7 ratio.8
[1,]     1    1738    1642    1794    2051    2079    2234    2032    2035
[2,]     2    1364    1408    1597    1444    1342    1675    1470    1448
[3,]     3    1759    1685    1479    1763    1674    2103    1502    1622
[4,]     4    1223    1146    1010    1257    1426    1532    1953    1123
[5,]     5    1456    1499    1609    1741    1482    1572    1606    1735
     ratio.9 ratio.10 ratio.11 ratio.12 weight.1 weight.2 weight.3 weight.4
[1,]    2115     2262     2267     2517     7861     9251     8706     8575
[2,]    1464     1831     1612     1471     1622     1742     1523     1515
[3,]    1828     2155     2233     2059     1147     1357     1329     1204
[4,]    1343     1243     1762     1306      407      396      348      341
[5,]    1607     1573     1613     1690     2902     3172     3046     3068
     weight.5 weight.6 weight.7 weight.8 weight.9 weight.10 weight.11 weight.12
[1,]     7917     8263     9456     8003     7365      7832      7849      9077
[2,]     1622     1602     1964     1515     1527      1748      1654      1861
[3,]      998     1077     1277     1218      896      1003      1108      1121
[4,]      315      328      352      331      287       384       321       342
[5,]     2693     2910     3275     2697     2663      3017      3242      3425
> |
```

Fungsi yang digunakan untuk model kredibilitas adalah fungsi *cm*. Untuk model Buhlmann di mana tidak mempertimbangkan adanya pembobotan, premi dapat ditentukan sebagai berikut:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12)

Structure Parameters Estimators

  Collective premium: 1671.017

  Between state variance: 72310.02
  Within state variance: 46040.47
```

Berikut hasil simulasi untuk model Buhlmann-Straub (memperhitungkan adanya pembobotan) yang menggunakan model Bichsel Straub:

```
> cm(~state, hachemeister, ratios=ratio.1:ratio.12, weights=weight.1:weight.12)
Call:
cm(formula = ~state, data = hachemeister, ratios = ratio.1:ratio.12,
    weights = weight.1:weight.12)

Structure Parameters Estimators

  Collective premium: 1683.713

  Between state variance: 89638.73
  Within state variance: 139120026
```

Dari simulasi di atas diperoleh nilai premi kredibilitas untuk model Buhlmann adalah 1671.017, sedangkan untuk model Buhlmann-Straub diperoleh premi kredibilitas sebesar 1683.713.

SimulasiContoh 1

Untuk menguji hasil dari contoh 1, kami melakukan simulasi dengan membangkitkan data besarnya klaim. Data tersebut kami sajikan sebagai berikut:

```
> simulasi
  periode   bulan.1   bulan.2    bulan.3    bulan.4   bulan.5    bulan.6
1       1 0.6376503 0.6033292 0.06649485 0.06783176 0.0809631 0.07325076
2       2 0.9284553 0.8202483 0.50642640 0.80434591 0.7779573 0.79099336
```

Dari data tersebut diketahui$\overline{X} = 0.513$. Dengan menggunakan formula Z dalam contoh 1, diperoleh

$$Z = \frac{n}{n+6} = \frac{12}{12+6} = 0.67,$$

diperoleh hasil dugaan premi Buhlmann secara teori sebagai berikut:

$$(1-Z)\mu + Z\overline{X} = 0.5088.$$

Dengan menggunakan perintah *cm* dalam package *actuar* diperoleh hasil berikut:

```
> cm(~periode,simulasi,ratios=bulan.1:bulan.6)
Call:
cm(formula = ~periode, data = simulasi, ratios = bulan.1:bulan.6)

Structure Parameters Estimators

  Collective premium: 0.5131622

  Between periode variance: 0.1250378
  Within periode variance: 0.0500418
```

Terlihat bahwa hasil dugaan premi yang diperoleh adalah 0.5132.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh PUPT-IPB *under contract* no: 079/SP2H/LT/DRPM/I I/2016.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hachemeister CA. 1975. Credibility for regression models with application to trend. In *credibility, theory and applications*, Proceeding of the berkeley Actuarial Research Conference on Credibility, pages 129-163. New York: Academic Press.

[2] Buhlmann H,Gisler A. 2005.*A course in credibility theory and its applications*. Springer, ISBN 3-5402575-3-5.

[3] Buhlmann H, Straub E. 1970.Glaubgwurdigkeit fur Schadensatz. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 70: 111-133.

[4] Klugman SA,*et.al*. 2012. *Loss Models*: *From Data to Decisions*. Wiley, ISBN 1118315324.